

LE CALCUL ACTUARIEL

QUELQUES RAPPELS

La présentation faite dans ce document n'a d'autres ambitions que de fournir à l'étudiant quelques concepts indispensables dans le domaine du calcul actuariel. La présentation faite est souvent (abusivement) simplificatrice.

Intérêts simples / Intérêts composés

- Intérêts simples : le capital est placé de période en période, les intérêts sont perçus mais ne font pas l'objet d'un remplacement
- Intérêts composés : le capital et les intérêts font l'objet d'un remplacement

Accumulation / Actualisation

- Accumulation : procédure par laquelle on calcule la valeur future de francs perçus aujourd'hui
- Actualisation : procédure par laquelle on calcule la valeur actuelle (aujourd'hui) de francs perçus dans le futur

Actualisation en temps discret

Valeur future d'un montant perçu aujourd'hui

$$VF = VA \times (1 + i)^t$$

où $(1 + i)^t$ est appelé facteur d'accumulation

Valeur actuelle d'un montant perçu dans le futur

$$VA = VF_t \times \frac{1}{(1 + i)^t}$$

où $\frac{1}{(1 + i)^t}$ est appelé facteur d'actualisation

Périodicité différente de l'année

Si les intérêts sont perçus à une fréquence s (s fois par an), la valeur future d'un montant perçu aujourd'hui devient :

$$VF_t = VA \times \left(1 + \frac{i}{s}\right)^{st}$$

Le passage d'un taux en une fréquence m_1 de composition vers un taux en une fréquence m_2 de composition s'effectue par le raisonnement suivant :

$$A\left(1 + \frac{R_{m_1}}{m_1}\right)^{m_1 n} = A\left(1 + \frac{R_{m_2}}{m_2}\right)^{m_2 n}$$

$$R_{m_2} = \left[\left(1 + \frac{R_{m_1}}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}} - 1 \right] m_2$$

Valeur actuelle d'une perpétuité

Une perpétuité est un montant fixe perçu jusqu'à la fin des temps. Sa valeur actuelle se calcule comme suit :

$$VA = \frac{A}{(1+i)^1} + \frac{A}{(1+i)^2} + \dots$$

Posons que $X = \frac{1}{(1+i)}$ et que $a = \frac{A}{(1+i)}$

alors

$$(1) VA = a(1 + X + X^2 + X^3 + \dots)$$

$$(2) XVA = a(X + X^2 + X^3 + \dots)$$

$$(1) - (2) VA(1 - X) = a$$

On en déduit en remplaçant a et X par leur valeur que :

$$VA = \frac{A}{i}$$

Valeur actuelle d'une annuité

La valeur actuelle d'une annuité est obtenue par la différence entre deux perpétuités perçues à des moments différents du temps :

Si $\frac{A}{i}$ est la valeur actuelle d'une perpétuité perçue aujourd'hui

et $\frac{A}{i} \times \frac{1}{(1+i)^t}$ est la valeur actuelle d'une perpétuité perçue en t,

la valeur actuelle d'une annuité est : $VA = \frac{A}{i} - \frac{A}{i} \times \frac{1}{(1+i)^t}$,

$$\text{soit } VA = A \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t} \right] = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-t}}{i} \right]$$

Pour la valeur future, il suffit d'accumuler le résultat sur t périodes (le multiplier par $(1+i)^t$).

Actualisation en temps continu

Le passage à l'actualisation en temps continu s'effectue par le calcul des valeurs actuelles et futures lorsque la périodicité de paiement des intérêts (notée s à la section précédente) tend vers l'infini :

$$\text{Sachant que : } VF_t = VA \times \left(1 + \frac{i}{s}\right)^{st}$$

le passage à l'actualisation en temps continu est obtenu en faisant tendre s vers l'infini :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} VF_t = \lim_{s \rightarrow \infty} VA \times \left(1 + \frac{i}{s}\right)^{st}$$

Pour calculer cette limite, on procède comme suit :

$$VA \times \left(1 + \frac{i}{s}\right)^{st} = \left[VA \times \left(1 + \frac{i}{s}\right)^{\frac{s}{i}} \right]^{it}$$

$$\text{et } m = \frac{s}{i}$$

$$\text{ce qui donne : } \left[VA \times \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right]^{it}$$

or la $\lim \left[1 + \frac{1}{m} \right]^m$ lorsque m tend vers l'infini est e

$$\Rightarrow VF_t = VA e^{it} \text{ et } VA = VF_t e^{-it}$$

Partant des propriétés de l'exponentielle et du logarithme, on peut en déduire les relations suivantes :

- Le taux en composition continue équivalent au taux en composition discrète (avec m composition par période) est obtenu par le raisonnement suivant :

$$Ae^{R_c n} = A\left(1 + \frac{R_m}{m}\right)^{mn}$$

$$\Rightarrow e^{R_c} = \left(1 + \frac{R_m}{m}\right)^m$$

$$\Rightarrow R_c = m \ln\left(1 + \frac{R_m}{m}\right)$$

et

$$\Rightarrow R_m = m\left(e^{R_c/m} - 1\right)$$

- La moyenne des taux de rendements en composition continue est leur moyenne arithmétique. Ainsi, si r^{01} est le taux entre la période 0 et la période 1, r^{12} est le taux entre la période 1 et la période 2, le taux composé sur deux période est r^{02} :

$$VF \acute{e} = \left(VAe^{r_{01}}\right)e^{r_{12}} = VAe^{r_{01} + r_{12}}$$

$$\Rightarrow r_{02} = r_{01} + r_{12}$$

et

$$\Rightarrow \text{Le taux moyen est : } \frac{r_{01} + r_{12}}{2}$$